3.7 Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

1. Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g.

Αν $\int_1^3 f(x)dx = 6$, $\int_1^8 f(x)dx = 29$, $\int_3^5 f(x)dx = 8$, $\int_1^5 g(x)dx = -6$, τότε:

α) Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_3^8 f(x)dx$ **ii.** $\int_5^8 2f(x)dx$ **iii.** $\int_1^5 (f(x)+g(x))dx$

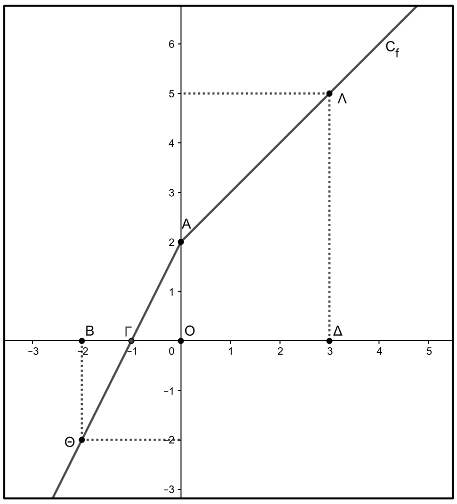
β) Αν για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $g(x) \le 0$ για κάθε $x \in [1,5]$, τότε να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=5$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \le 0 \\ 1-\sigma\upsilon\nu x & , \ x > 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=-2$ και $x=\pi$.

3. Στο σχήμα η τεθλασμένη γραμμή ΘΑΛ αποτελεί γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης στο $\mathbb{R}$, που διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\Gamma(-1,0)$.



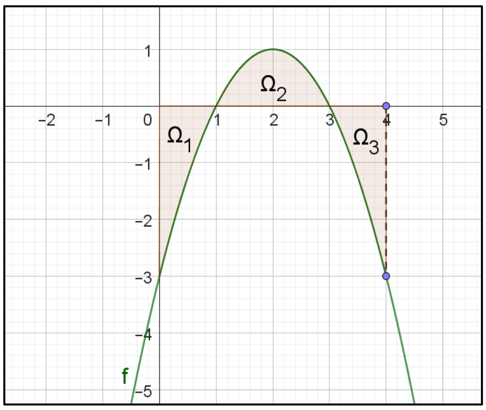
α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$ **ii.** $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ **iii.** $\int_0^3 f(x)dx$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=-2$ και $x=3$.

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για τα εμβαδά των περιοχών $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ του παρακάτω σχήματος ισχύει

$$E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = E(\Omega_3) = \frac{4}{3}$$

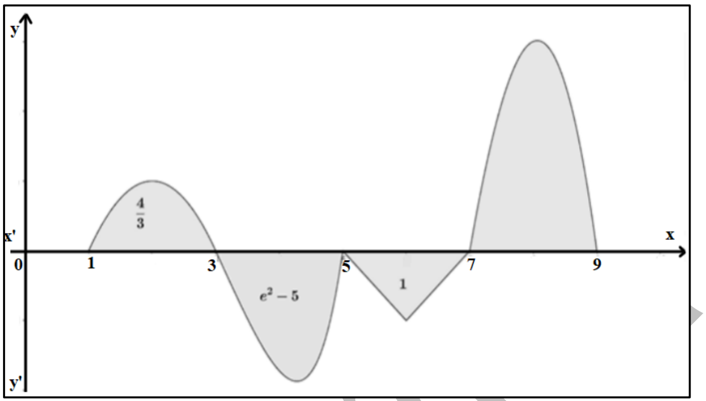


α) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 f(x)dx$ **ii.** $\int_0^3 f(x)dx$ **iii.** $\int_0^4 f(x)dx$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\int_{0}^{2023} f(x)dx - \int_{4}^{2023} f(x)dx$.

5. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,9]\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Πάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι τιμές των εμβαδών των χωρίων που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x'x$, όταν $x\in[1,7]$. Δίνεται ακόμη ότι $\left(\int_7^9 f(x)dx\right)^2=16$ και ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία με τετμημένες $1,\ 3,\ 5,\ 7$.



α) Να αποδείξετε ότι $\int_7^9 f(x)dx=4$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$, όταν $x\in[1,9]$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^9 f(x)dx$.

6. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, με $\alpha>0$ και $f(x)>0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $\int_\alpha^\beta xf(x)f'(x)dx=-\ln 2$, $\beta f^2(\beta)=\alpha f^2(\alpha)$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=xf^2(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^2(x)$, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$, είναι $\ln 4$ τετραγωνικές μονάδες.

γ) Να αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

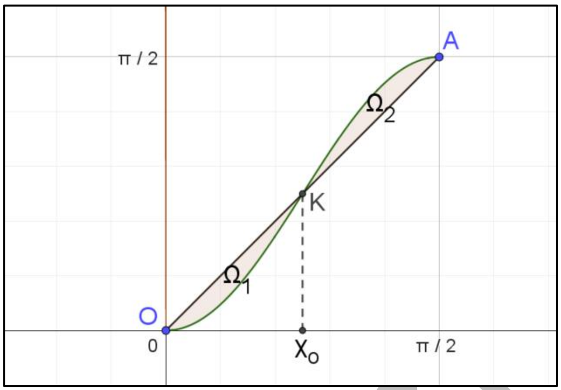
δ) Έστω ότι η συνάρτηση G είναι μια αρχική της f στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, ισχύει $\dfrac{G(x)-G(\alpha)}{x-\alpha}<f(\alpha)$.

7. Έστω $I=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 x dx$ και $J=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2 x dx$.

α) Να αποδείξετε ότι $I+J=\dfrac{\pi^2}{4}$.

β) Με χρήση της αντικατάστασης $u=\dfrac{\pi}{2}-x$ να αποδείξετε ότι $I=J$ και κατόπιν ότι $I=J=\dfrac{\pi^2}{8}$.

γ) Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=\frac{\pi}{2}\eta\mu^2 x$ στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Η ευθεία ΟΑ τέμνει τη C_f στα σημεία $O(0,0)$, $A\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $K(x_o,f(x_o))$ και ορίζει με τη C_f τα χωρία Ω_1, Ω_2. Να αποδείξετε ότι :



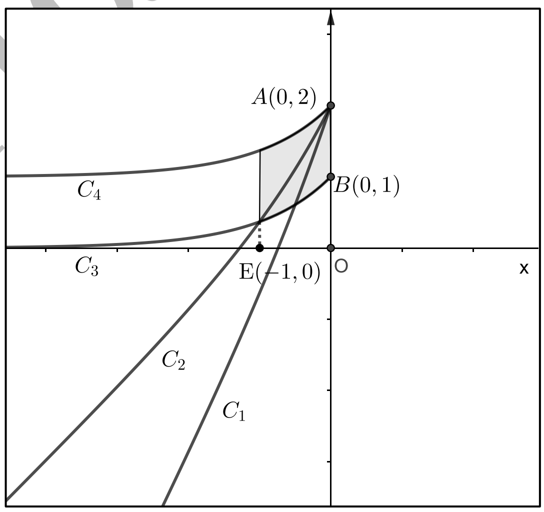
i. το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα yy΄ και της ευθείας $y=\frac{\pi}{2}$ είναι το J.

ii. τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 είναι ίσα .

8. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g και h με $f(x)=e^x$, $g(x)=e^x+1$, $h(x)=e^x+x+1$, $x\in(-\infty,0]$.

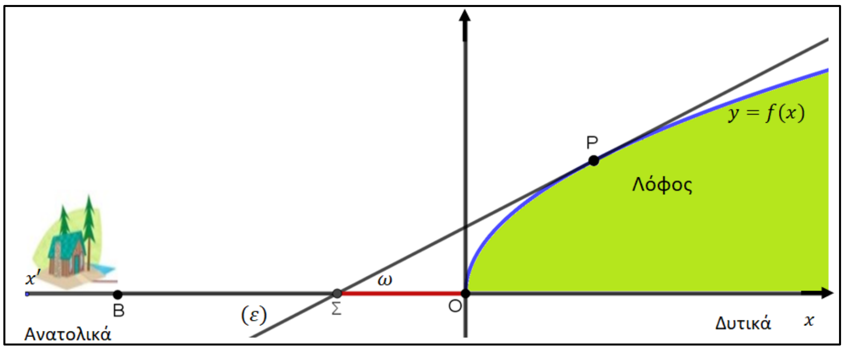
α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση *h* ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται 4 γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, οι C_1, C_2, C_3, C_4. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε μία από τις συναρτήσεις f, g και h τη γραφική της παράσταση, επιλέγοντας μεταξύ των C_1, C_2, C_3, C_4 την κατάλληλη και να δικαιολογήσετε πλήρως την επιλογή σας.



γ) Να αποδείξετε ότι, η καμπύλη C_2 χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες C_3 και C_4 και τις κατακόρυφες ευθείες $x=-1$ και $x=0$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

9. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο απεικονίζεται μια αγροικία στην θέση Β του αρνητικού ημιάξονα Οx′. Δυτικά της αγροικίας, κατά μήκος του θετικού ημιάξονα Οx, υπάρχει ένας λόφος, το ύψος του οποίου δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ για $x\geq 0$. Όλες οι συντεταγμένες μετρούνται σε μέτρα.



Καθώς ο ήλιος αρχίζει να δύει, ο λόφος ρίχνει στην πεδιάδα την σκιά του ΟΣ, η οποία και μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου t, όπως φαίνεται στο σχήμα.

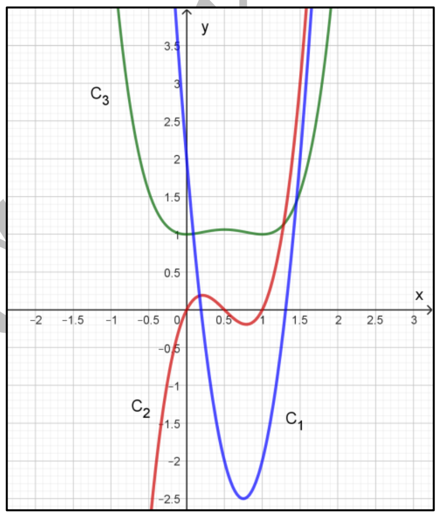
Θεωρούμε $t=0$ τη στιγμή που ο ήλιος ρίχνει κάθετα τις ακτίνες του στο σημείο Ο του λόφου, ενώ στη συνέχεια κινούμενος προς τα δυτικά, αρχίζει να δημιουργείται η σκιά. Ας είναι $\hat{\omega}=P\hat{\Sigma}O$.

α) Αν το σημείο P έχει συντεταγμένες $P(x_P, y_P)$, να αποδείξετε ότι η τετμημένη του σημείου Σ είναι $x_\Sigma = -x_P$.

β) Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ ισχύει $\varepsilon\varphi(\omega(t)) = \frac{1}{2}(x_p(t))^{-\frac{1}{2}}$.

γ) Να βρείτε πόσο γρήγορα μεγαλώνει η σκιά ΟΣ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία οι ακτίνες του ήλιου σχηματίζουν γωνία $\omega = \frac{\pi}{6}$ με τον οριζόντιο άξονα, ενώ αυτή τη χρονική στιγμή t_0 η γωνία ω μειώνεται με ρυθμό $\frac{1}{16}$ rad ανά λεπτό. Δίνεται ότι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = 1 + \varepsilon\varphi^2\omega$.

10. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f' και F, όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι η C_3 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1, ενώ η C_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακόμη σημεία με τετμημένες $\frac{1}{2}, 1$. Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2,



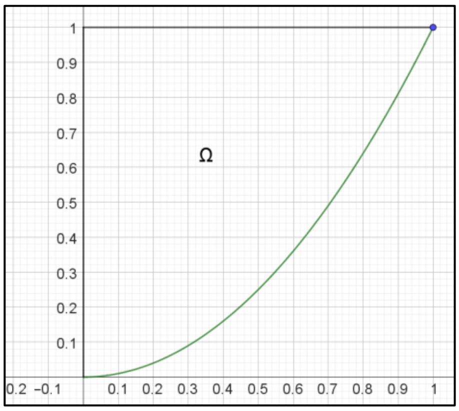
α) να μελετήσετε με τη βοήθεια του σχήματος τη συνάρτηση F ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα,

β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F,

γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f' και F,

δ) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του άξονα $x'x$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

11. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς και γνησίως αύξουσας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[0,1]$, η οποία διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$. Το χωρίο Ω περικλείεται από τον άξονα yy' την ευθεία $y = 1$ και τη γραφική παράσταση της f.



α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα και σχεδιάσετε σε αυτό τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2}$.

δ) Αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής αξιοποιώντας το παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι:

i. $\int_0^1 f^{-1}(x)dx = 1 - \int_0^1 f(x)dx$, **ii.** $E(\Omega) = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω.

12. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} -3x^2+1 & , \quad x<0 \\ -x^3+3x^2+1 & , \quad x\ge 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1<0$ και $x_2>3$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1,x_2]$ με x_1,x_2 οι ρίζες της f του ερωτήματος α). Να βρείτε όλα τα $\xi\in(x_1,x_2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

γ) Αν ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία ε και την ευθεία $x=0$.

13. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=-x^3+3x^2+1$, $x\ge 0$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η f παρουσιάζει στο $x_1=0$ τοπικό ελάχιστο, στο $x_2=2$ μέγιστο και το σημείο $\Gamma(1,f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

ii. Τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και $\Gamma(x_3,f(x_3))$ είναι συνευθειακά και το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ ορίζει με τη γραφική παράσταση της f δύο ισεμβαδικά χωρία.

γ) Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Β, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο Δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f, της ευθείας ε και του άξονα $y'y$.

14. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -x^2+x+1 & , \quad -1\le x<1 \\ 1+\dfrac{\ln^2 x}{x} & , \quad x\ge 1 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$.

β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}$. Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e$.

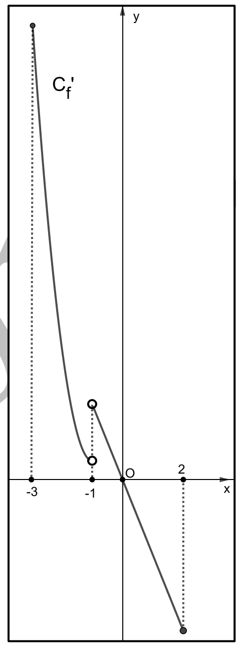
15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{-x}$, $g(x)=f(x)\cdot ημx$, $x\in[0,2\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A\left(\dfrac{\pi}{2},e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$, στο διάστημα ορισμού τους $[0,2\pi]$.

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $y'y$ και τις γραφικές παραστάσεις των C_f , C_g .

16. Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[-3,2]$, η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f, η $C_{f'}$ που στο διάστημα $(-1,2]$ είναι ευθύγραμμο τμήμα.



α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

β) Να βρείτε:

i. τα κρίσιμα σημεία της f , αν υπάρχουν, δικαιολογώντας την απάντησή σας,

ii. τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και το είδος τους.

γ) Αν η f' είναι συνεχής στο $[0,2]$ και ισχύει ότι $\int_0^2 f'(x)dx = -4$, να υπολογίσετε την τιμή $f'(2)$.

17. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)(x-1)}{\ln x} = 0 \text{ και } f'(x) = \sqrt{x^2+1} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

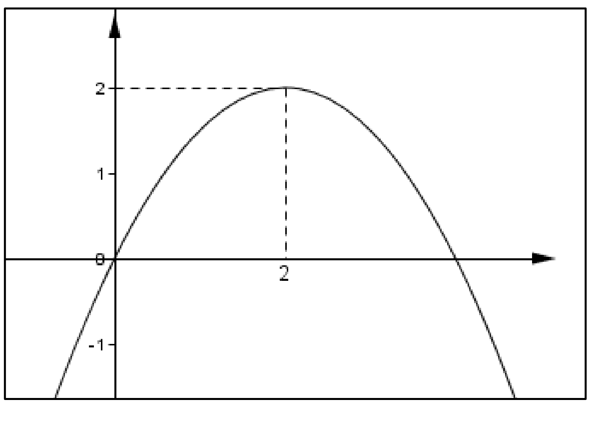
α) **i.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$, **ii.** Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ε, που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=0$ και $x=1$.

18. Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η κορυφή της είναι το σημείο Κ(2, 2) και είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.



α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Α(0, 1), να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 1.$$

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + x + 1 - \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) **i.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασης της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x > 0$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \pi$.

19. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2}$ με $x \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(1 + f(x)) - \ln(f(x)) > f^2(x) \cdot f(\ln 2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$ είναι $\ln\left(\frac{27}{4e}\right)$.

20. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^{-x}$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

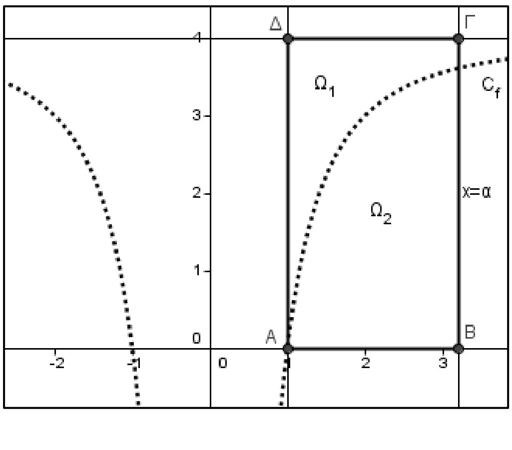
β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$ και $\Gamma(x, g(x))$ με $x > 0$. Η παράλληλη ευθεία από το Β προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ, ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Ζ.

i. Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $B\Gamma Z\Delta$ είναι $E(x) = \dfrac{x^3}{e^x}$, $x > 0$.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του x, το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

γ) Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \dfrac{f(x) - g(x)}{x}$, τον άξονα $x'x$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \ln 2$ και $x = 1$, είναι $\ln\sqrt{2e} - \frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - \dfrac{4}{x^2}$, $x \neq 0$.



α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f.

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1 x_2 = -4$.

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο ΑΒΓΔ που ορίζεται από τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1,\ x=\alpha,\ \alpha>1$ και $y=4$. Η C_f χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία Ω_1, Ω_2.

i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α, τα εμβαδά $E(\Omega_1),\ E(\Omega_2)$ των χωρίων.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(\Omega_1)=E(\Omega_2)$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+5x-2,\ x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_o που περιέχεται στο διάστημα $(0,1)$.

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός x_o είναι πιο κοντά στο 0 ή στο 1.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x_o+\theta)x^3+2x-5}{f(x_o-\theta)x-5}$, αν x_o είναι ο αριθμός του ερωτήματος (α) και θ ένας θετικός αριθμός.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, την εφαπτομένη της στο σημείο $A(1,\ 4)$ και την κατακόρυφη ευθεία $x=2$.

23. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi x}{4}\right), & 0\le x\le 1\\ 1-\dfrac{4\ln x}{x}, & x>1\end{array}\right\}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 1.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $[0,+\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$, είναι $E=\dfrac{\ln 4}{\pi}$ τετραγωνικές μονάδες.

24. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει ότι $f'(x)>f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ και $f(x)<0$ για κάθε $x<0$.

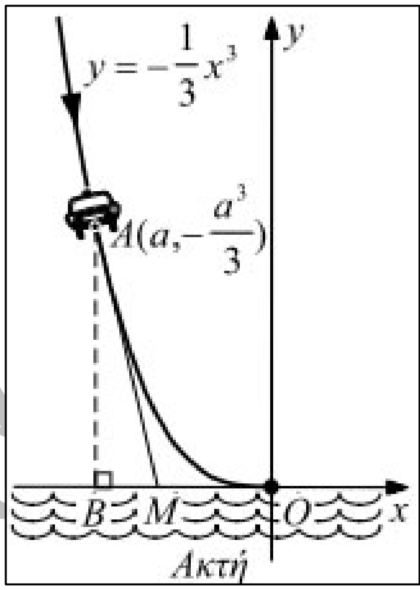
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x|+1)=f(|x|+1)$.

δ) Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $E<f(1)$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\frac{1}{3}x^3$ με $x\in(-\infty,0]$ και τυχαίο σημείο $A\left(\alpha,-\frac{\alpha^3}{3}\right)$ με $\alpha<0$ της γραφικής της παράστασης.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α.

β) **i.** Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=-\frac{1}{3}x^3$, $x\le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (όπως φαίνεται στο σχήμα).



Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\alpha(t)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3.

ii. Να ερμηνεύσετε το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη -3.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\ln x+x,\ x>0$

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)>x$.

γ) Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x)=e^{f(|x|)}$ για κάθε $x\neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(x)=x^2e^{|x|},\ x\in\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g, τον $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=-1,\ x=1$.

27. Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [0,2], παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν $f(1)=1$ και $f(x)\cdot f'(x)=-x+1$, για κάθε $x\in(0,2)$.

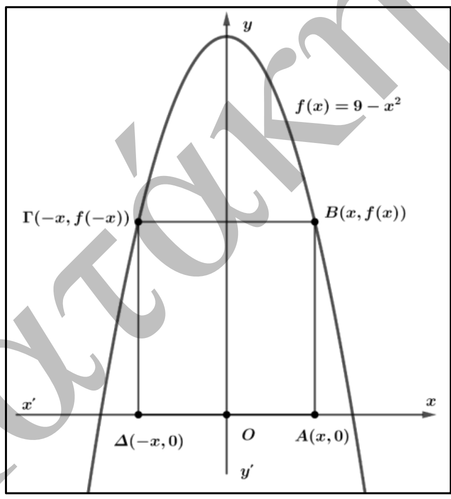
α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x)=-x^2+2x$ για κάθε $x\in[0,2]$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$ για κάθε $x\in[0,2]$.

γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο $K(1,0)$ και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)dx$.

28. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=9-x^2$. Μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα $x'x$ είναι εγγεγραμμένο το ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Οι κορυφές $A(x,0)$ και $\Delta(-x,0)$ είναι σημεία του άξονα $x'x$, ενώ οι κορυφές $B(x,f(x))$ και $\Gamma(-x,f(-x))$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.



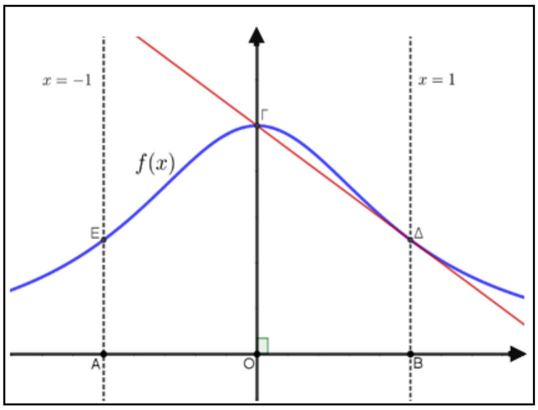
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του $x \in [0,3]$ δίνεται από την συνάρτηση $E(x)=18x-2x^3$.

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση $E(x)$ ως προς την μονοτονία.

γ) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό, και να αποδείξετε ότι αυτό ισούται με $12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, του άξονα $x'x$ και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ όταν το εμβαδό του παίρνει την μέγιστη τιμή του.

29. Στο σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ και οι ευθείες με εξισώσεις $x=-1$ και $x=1$ οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα $x'x$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της f στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Δ, είναι η ευθεία ΓΔ.

β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[0,1]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ΓΔ, με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία Γ και Δ.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(x)dx > \dfrac{3}{2}$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}(1-x)\eta\mu^2\left(\dfrac{1}{1-x}\right), & \alpha\nu\ 0 \le x < 1 \\ 0, & \alpha\nu\ x=1\end{cases}$

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in [0,1]$, ισχύει $0 \le f(x) \le 1 - x$.

γ) Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0,\ x = 1$ ισχύει $E < \frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

31. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε η γραφική παράσταση της f, να εφάπτεται της $\varepsilon : y = \frac{1}{4}$, στο $x_0 = 0$, η f είναι κυρτή και $f(1) = 1$.

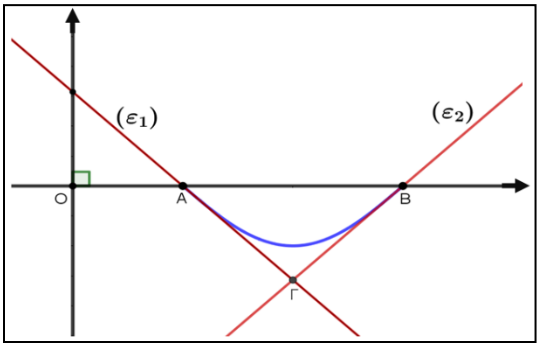
α) Να αποδειχθεί ότι: **i.** $f(0) = \frac{1}{4}$ και $f'(0) = 0$, **ii.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4f(x) - 1}{\eta\mu x \cdot f(x)} = 0$.

β) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \ge 0$, για κάθε $x \in [0,1]$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f', τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

32. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα. Στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ έχουν σχεδιασθεί οι εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της f οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών (ε_1), (ε_2) είναι $(\varepsilon_1)\ y = -x + \frac{\pi}{2}$ και $(\varepsilon_1)\ y = x - \frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2).

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο A τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$, και την ευθεία με εξίσωση $x=1$, είναι $E=e+(x_0-1)(1-\ln x_0)$.

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x+1+\dfrac{1}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y=-x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ, η οποία είναι μεγαλύτερη του 1.

γ) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\rho$ ισούται με $E(\Omega)=-\dfrac{(\rho-1)^2}{2}-(\rho-1)+e^{-1}$ τετραγωνικές μονάδες.

35. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=x^3+3x^2-\lambda x+1$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής K.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους.

γ) Έστω ότι $K(-1,\lambda+3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2, με $x_1<-1<x_2$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_P στο σημείο K και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_P και των ευθειών $x=x_1, x=-1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_P και των ευθειών $x=x_2, x=-1$.